

Podstawy metody elementów skończonych

1. Wprowadzenie

Symulacje komputerowe wymagają stosowania metod numerycznych do rozwiązywania układów cząstkowych równań różniczkowych określonych na obszarach o skomplikowanych geometriach. Na brzegach tych obszarów zdefiniowane są odpowiednie warunki brzegowe, a w przypadku zagadnień zależnych od czasu w rozważanym obszarze – również warunki początkowe. Co prawda rośnie wydajność obliczeniowa stosowanych komputerów, ale jednocześnie modeluje się i rozwiązuje coraz bardziej skomplikowane zagadnienia. Wymaga to rozwoju nie tylko sprzętu, ale również oprogramowania, co wiąże się między innymi z opracowywaniem efektywniejszych metod i algorytmów.

Z matematycznego punktu widzenia **metody objętości skończonej** [Hym1992], **różnic skończonych** [Hil1968], **elementów brzegowych** [Ban1994, Bur1995, Kan1994,], czy też **metoda elementów skończonych** [Hin1979, Zie2000a, Zie2000b, Zie2000c] są ze sobą blisko powiązane i trudno jest zdecydować, która z nich ma zdecydowaną przewagę nad pozostałymi.

Podstawową zaletą tych metod jest możliwość uzyskania rozwiązań dla skomplikowanych kształtów, dla których niemożliwe jest przeprowadzenie obliczeń analitycznych.

Każda z metod oparta na dyskretyzacji przestrzennej ma zarówno swoje zalety, jak i wady. Podobnie jest z doskonalonymi w ostatnim czasie metodami bezsiatkowymi [Fas2007, Liu2003].

Wymieniając metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, wspomnieć należy również o **metodzie kollokacji brzegowej**, należącej do grupy metod brzegowych. Metoda ta może być rozpatrywana jako jeden z wariantów metody Trefftza, w której równanie różniczkowe rządzące zjawiskiem jest spełnione ściśle (przez przyjętą postać funkcji próbnych), a warunki brzegowe są spełnione w sposób przybliżony [Tre1926]. Jednym ze sposobów użycia przybliżonego spełnienia jest metoda kollokacji brzegowej. W pracy [Kol2001] zaprezentowano przegląd prac dotyczących zastosowania metody kollokacji brzegowej do rozwiązywania problemów mechaniki stosowanej.

Obecnie metoda elementów skończonych (MES) jest szeroko stosowana w rozwiązywaniu zadań wynikających z praktycznych problemów przemysłowych [Hua1999]. W tym rozdziale zawarte jest krótkie wprowadzenie do metody elementów skończonych. Przedstawione są również sposoby badania oraz kontroli stabilności rozwiązań numerycznych z wykorzystaniem MES. Sposoby te można wykorzystać również w innych metodach siatkowych.

W latach pięćdziesiątych XX wieku zaczęto do rozwiązywania zagadnień technicznych wykorzystywać metodę różnic skończonych. W późniejszych latach równie skutecznie stosowano metodę elementów skończonych. Szczegółowa teoria metody elementów skończonych została opisana w licznej literaturze, np. [Hue1975, Tay1981, Zie2000a, Zie2000b, Zie2000c]. W książkach Zienkiewicza wypunktowano jej zalety.

Jedną z cech decydujących o przewadze metody elementów skończonych nad metodą różnic skończonych jest względna łatwość uwzględniania w obliczeniach warunków brzegowych rozwiązywanych zagadnień [Bur1985]. Wiele rzeczywistych problemów charakteryzuje się warunkami brzegowymi wyrażonymi za pomocą wyznaczanych wielkości oraz nieregularnymi i skomplikowanymi kształtami brzegów obszaru. Powoduje to, że aplikacja warunków brzegowych w metodzie różnic skończonych jest dosyć kłopotliwa. Wymaga bowiem aproksymacji tych warunków na węzłach siatki. **Algorytmy oparte na metodzie elementów skończonych są niezależnione od postaci szczegółowych warunków brzegowych.**

2. Metoda residuów ważonych

Jedną z metod pozwalających rozwiązać cząstkowe równanie różniczkowe z określonymi warunkami brzegowymi i początkowymi jest metoda residuów ważonych (MRW). Jest to metoda numeryczna, która może być użyta do rozwiązania pojedynczego równania lub układu równań różniczkowych cząstkowych określonego na obszarze Ω z brzegiem $\delta\Omega = \Gamma$, a dokładne rozwiązanie reprezentuje jedną zmienną lub wektor kolumnowy zmiennych.

Zastosowanie tej metody składa się z dwóch kroków.

W pierwszym zakłada się, że pewna funkcja w przybliżeniu (aproksymacyjnie) spełnia dane równanie różniczkowe oraz warunki brzegowe. Po podstawieniu tej funkcji aproksymującej do równania różniczkowego i warunków brzegowych można określić błąd spełnienia (dokładność aproksymacji) nazywany residuum. Wymagane jest, by residuum „znikało” (aby jego wartość była równa zero lub bliska zero) na rozważanym obszarze. Innymi słowy, im

mniejsza jest wartość residuum, tym lepsza jest funkcja aproksymująca rozwiązanie.

W drugim kroku rozwiązuje się dane równanie (lub równania) z warunkami brzegowymi wynikające z pierwszego kroku i tym samym można uzyskać rozwiązanie.

Rozważmy stacjonarne (niezależne od czasu) cząstkowe równanie różniczkowe

$$L(u) = f, \quad (1)$$

zdefiniowane w obszarze Ω wraz z warunkami brzegowymi określonymi na brzegu Γ . $L(u)$ określa operator różniczkowy, w którym znajdują się pochodne funkcji u do drugiego rzędu włącznie.

W metodzie residuów ważonych rozwiązanie u jest aproksymowane przez wyrażenie \bar{u} postaci

$$\bar{u} = S_0 + \sum_{j=1}^N u_j S_j, \quad (2)$$

gdzie S_j są funkcjami próbnymi, a S_0 musi spełniać wszystkie określone warunki brzegowe zagadnienia ($S_0 = 0$, jeżeli wszystkie warunki są jednorodne) i S_i musi spełniać następujące warunki:

- S_j powinna być taka, aby $L(S_j)$ była dobrze zdefiniowana i niezerowa, to znaczy, aby istniały wymagane jej pochodne;
- S_j musi spełniać przynajmniej warunek brzegowy Dirichleta rozważanego zagadnienia;
- dla dowolnego N zbiór funkcji próbnych $\{S_j, j=1, 2, \dots, N\}$ musi być liniowo niezależny.

Wprowadźmy pojęcie błędu lub residuum, R_Ω , aproksymacji (przez zastąpienie w równaniu szukanej funkcji jej przybliżeniem \bar{u}), które definiujemy jako

$$R_\Omega = L(\bar{u}) - f, \quad (3)$$

gdzie \bar{u} zawiera funkcje próbne oraz spełnia warunek brzegowy Dirichleta postaci $\bar{u} = u_0$ na fragmencie brzegu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Im wartość residuum jest mniejsza, tym aproksymacja rozwiązania jest lepsza. Zauważmy, że residuum R_Ω jest funkcją współrzędnych punktu w obszarze Ω . Zminimalizujmy w miarę możliwości wartość residuum do zera. Jeżeli wartość całki

$$\int_{\Omega} T_i R_\Omega d\Omega = 0, \quad (4)$$

gdzie T_i , $i = 1, 2, \dots, M$ jest zbiorem dowolnych funkcji oraz $M \rightarrow \infty$, to można powiedzieć, że residuum R_Ω zanika (równa się zero). W tym wypadku T_i

są nazywane funkcjami wagowymi. W ogólnym przypadku nie muszą one być takie same jak funkcje próbne S_i . Po rozwinięciu powyższego równania otrzymujemy

$$\int_{\Omega} T_i(L(\bar{u}) - f) d\Omega = 0. \quad (5)$$

Funkcja \bar{u} , spełniająca powyższe równanie dla każdej funkcji T_i w obszarze Ω , jest rozwiązaniem słabym (ang. *weak solution*) równania różniczkowego. Mocne rozwiązanie (ang. *strong solution*) \bar{u} spełnia równanie różniczkowe w każdym punkcie obszaru Ω .

Kiedy operator L jest liniowy, równanie (5) można zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} T_i L(S_j) d\Omega \right) \mu_j = \int_{\Omega} T_i (f - L(S_0)) d\Omega \quad (6)$$

lub w postaci macierzowej

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} u_j = f_i, \quad (7)$$

gdzie

$$A_{ij} = \int_{\Omega} T_i L(S_j) d\Omega \quad (8)$$

oraz

$$f_i = \int_{\Omega} T_i (f - L(S_0)) d\Omega. \quad (9)$$

Zauważmy, że w ogólnym przypadku macierz \mathbf{A} nie jest symetryczna, czyli $A_{ij} \neq A_{ji}$.

MRW (dla przypadku, kiedy $T_i \neq S_i$) jest czasami nazywana również **metodą Petrova-Galerkina**. Funkcjonuje ona pod różnymi nazwami w zależności od zastosowanych funkcji wagowych T_i . Poniżej przedstawiono w zarysie wybrane z nich.

Dla $T_i = S_i$ MRW znana jest jako metoda Galerkina. Kiedy operator L jest liniowy parzystego rzędu, metoda Galerkina redukuje się do metody Ritza. W tym przypadku macierz \mathbf{A} jest symetryczna.

Metoda najmniejszych kwadratów polega na poszukiwaniu rozwiązania postaci wyrażenia $\bar{u} = S_0 + \sum_{j=1}^N u_j S_j$, gdzie współczynniki u_j otrzymuje się, minimalizując całkę z kwadratu residuum

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega = 0 \text{ lub } \int_{\Omega} \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial u_i} R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (10-11)$$

Porównanie równań (11) i (4) pozwala stwierdzić, że $T_i = \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial u_i}$. Jeżeli operator L jest liniowy, równanie (5) przybiera postać

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} L(S_i) L(S_j) d\Omega \right) u_j = \int_{\Omega} L(S_i) (f - L(S_0)) d\Omega, \quad (12)$$

co oznacza symetryczny układ równań (macierz \mathbf{A} jest symetryczna), a równanie wymaga tego samego rzędu różniczkowania co operator.

Metodą kollokacji poszukuje się przybliżonego rozwiązania \bar{u} przez przyrównanie residuum $R_\Omega = R_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ do zera w N wybranych punktach (kollokacyjnych) \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ w obszarze Ω :

$$R_\Omega(\mathbf{x}_i, u_j) = 0. \quad (13)$$

Wybór punktów \mathbf{x}_i ma kluczowe znaczenie w uzyskaniu dobrze uwarunkowanego układu równań liniowych oraz dokładnego rozwiązania zagadnienia. Metoda kollokacyjna może być traktowana jako specjalny przypadek równania (4): $\int_{\Omega} T_i R_\Omega d\Omega = 0$ dla $T_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, gdzie $\delta(\mathbf{x})$ jest funkcją delta

Diraca

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\Omega = f(\xi). \quad (14)$$

Metoda Couranta jest połączeniem metody Ritza oraz metody najmniejszych kwadratów (dla operatora liniowego). Z jej użyciem poszukuje się przybliżenia rozwiązania \bar{u} przez minimalizowanie funkcjonału kwadratowego

$$I_p(\bar{u}) = I(\bar{u}) + \frac{\alpha}{2} \|L(\bar{u}) - f\|^2, \quad (5.15)$$

gdzie $I(u)$ jest funkcjonałem kwadratowym związanym z $L(u) = f$, kiedy operator L jest liniowy, a α jest predefiniowanym parametrem. Stosowanie tej metody jest ograniczone dla operatorów, które dopuszczają sformułowanie funkcyjne.

3. Współczynnikowa forma równań

Środowisko COMSOL Multiphysics jest interaktywnym i programowalnym pakietem obliczeniowym do rozwiązywania zagadnień inżynierskich i naukowych zdefiniowanych przez cząstkowe równania różniczkowe. Środowisko wsparte jest własnym językiem programowania (COMSOL Script) opartym na języku programowania MATLAB. Oba środowiska umożliwiają współdziałanie.

Niestacjonarne zagadnienie opisane układem cząstkowych równań różniczkowych w formie współczynnikowej wykorzystywane w środowisku pakietu COMSOL można przedstawić w postaci

$$\mathbf{e}_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{d}_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (16)$$

z warunkami brzegowymi

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{q} \mathbf{u} = \mathbf{g} - \mathbf{h}^T \boldsymbol{\mu} \quad (17)$$

oraz

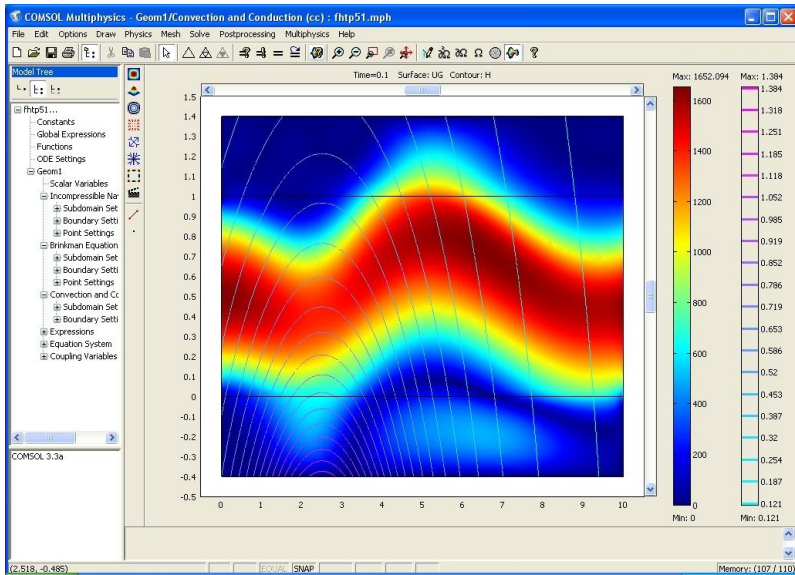
$$\mathbf{h} \mathbf{u} = \mathbf{r}. \quad (18)$$

Równanie (16) spełnione jest wewnątrz rozważanego obszaru, a warunki brzegowe, określone równaniem (17), nazywanym uogólnionym warunkiem Neumanna, oraz równaniem (18), nazywanym warunkiem Dirichleta, spełnione są na odpowiednich fragmentach brzegu obszaru. W rozważanych w pracy zagadnieniach pierwszy współczynnik równania (16) jest zerowy, $\mathbf{e}_a = \mathbf{0}$.

Współczynniki \mathbf{e}_a , \mathbf{d}_a , \mathbf{c} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{a} , \mathbf{F} , \mathbf{g} , \mathbf{q} , \mathbf{h} , $\boldsymbol{\mu}$ oraz \mathbf{r} są skalarami, wektorami, macierzami lub tensorami w zależności od rozważanego problemu. Ich komponenty mogą być funkcjami położenia, czasu oraz rozwiązania \mathbf{u} . W tym wypadku $\boldsymbol{\mu}$ są mnożnikami Lagrange'a. Przyjęto zwyczajowe nazwy poszczególnych współczynników: \mathbf{e}_a jest współczynnikiem masy (ang. *mass coefficient*), \mathbf{d}_a jest współczynnikiem tłumienia lub masy, \mathbf{c} jest współczynnikiem dyfuzji, $\boldsymbol{\alpha}$ jest współczynnikiem strumienia konwekcyjnego (ang. *conservative flux convection coefficient*), $\boldsymbol{\beta}$ jest współczynnikiem konwekcji, \mathbf{a} jest współczynnikiem absorpcji, $\boldsymbol{\gamma}$ jest członem strumienia źródła (ang. *conservative flux source term*), \mathbf{F} jest czynnikiem źródłowym, \mathbf{q} jest brzegowym współczynnikiem absorpcji, a \mathbf{g} jest brzegowym czynnikiem źródła.

Jeżeli \mathbf{u} jest wektorem zmiennych zależnych, to współczynnik masy \mathbf{e}_a jest macierzą. Nazwa tego współczynnika ukształtowała się na skutek tego, że w wielu zagadnieniach pojawia się w nim gęstość masy. Współczynnik \mathbf{d}_a

reprezentuje tłumienie w równaniu falowym. Jednakże, jeżeli $\mathbf{e}_a = \mathbf{0}$, to \mathbf{d}_a jest również nazywane współczynnikiem masy. Domyślne ustawienia, czyli $\mathbf{e}_a = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{d}_a = \mathbf{1}$, reprezentują równanie niestacjonarnego przepływu ciepła. Przy założeniu, że $\mathbf{e}_a = \mathbf{1}$, a $\mathbf{d}_a = \mathbf{0}$, mamy do czynienia z równaniem falowym bez tłumienia.



4. Dyskretyzacja problemów niestacjonarnych

Przy rozwiązywaniu zagadnień niestacjonarnych (nieustalonych, zależnych od czasu) zakłada się, że szukane współczynniki u_j są funkcjami czasu, a funkcje próbne S_j są zależne tylko od współrzędnych położenia. Takie założenia prowadzą do dwukrokowego algorytmu rozwiązywania zagadnienia. Przy rozwiązywaniu zagadnienia niestacjonarnego najpierw rozważa się przestrzenną aproksymację równania, a następnie aproksymację w czasie. Taka strategia nazywana jest półdyskretną aproksymacją w przestrzeni. Aproksymacja ta prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych zależnych od czasu. Istnieje wiele sposobów przeprowadzenia dyskretyzacji względem czasu.

W metodzie elementów skończonych dyskretyzacja w przestrzeni niestacjonarnych zagadnień drugiego rzędu prowadzi do równań:

$$L(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}, t) - N(\mathbf{U}, t)^T \Lambda = \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$M(\mathbf{U}, t) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

które określają metodę nazywaną w języku angielskim *method of lines*. W celu rozwiązania powyższego układu równań różniczkowych lub układu równań różniczkowo-algebraicznych COMSOL Multiphysics wykorzystuje metodę rozwiązywania układu równań różniczkowo-algebraicznych DASSL zaproponowaną w pracy [Bro1994] przez Lindę Petzold. Metoda DASSL oparta jest na starszej metodzie DASSL [Bre1989]. Jest to metoda jawna, oparta na formule wstecznego różniczkowania (ang. *backward differentiation formulas*, BDF). Tym samym w każdym jej kroku konieczne jest rozwiązanie nieliniowego układu równań z wykorzystaniem metody Newtona, a następnie liniowego układu równań. Linearyzacja w metodzie Newtona prowadzi do równań o postaci:

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{L} - \mathbf{N}^T \Lambda, \quad (21)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{V} = \mathbf{M}, \quad (22)$$

gdzie $\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}}$ jest macierzą sztywności, $\mathbf{D} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{U}}}$ jest macierzą tłumienia,

a $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \ddot{\mathbf{U}}}$ jest macierzą masy. Gdy $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, wówczas \mathbf{D} jest często nazywane macierzą masy.

Ze względu na dokładność obliczeń niezbędne jest ustalenie maksymalnego względnego i bezwzględnego błędu realizacji algorytmu rozwiązującego zagadnienie niestacjonarne. Wykorzystując wartości błędów względnego i bezwzględnego, można kontrolować błąd wykonania algorytmu po każdym kroku całkowania. Zadowalający będzie stan obliczeń, w którym wartości błędów względnego i bezwzględnego nie będą większe od ustalonych odpowiednio ich wartości maksymalnych.

Jeżeli założy się, że U jest rozwiązaniem (wektorem wyznaczanych wielkości) w pewnym kroku całkowania, a E jest ustaloną wartością błędu, to akceptowalny jest krok całkowania, dla którego spełniona jest nierówność

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \left(\frac{|E_i|}{A_i + R|U_i|} \right)^2} < 1, \quad (23)$$

gdzie A_i jest bezwzględną tolerancją dla i -tej zmiennej (i -tego stopnia swobody), R jest względnym błędem, a N jest liczbą stopni swobody (liczbą wyznaczanych wartości). Zakumulowany błąd (globalny) może być większy od sumy błędów lokalnych we wszystkich krokach całkowania. Jednak zdarza się to w szczególnych przypadkach. Najczęściej mamy do czynienia z błędem lokalnym tego samego rzędu co błąd globalny.

Modelowanie wymiany masy, czy też ciepła z wykorzystaniem metody elementów skończonych dla złożonych (skomplikowanych) obszarów wymaga podziału obszaru na elementy i dyskretyzacji równań. Dyskretyzacja równań wymiany, w których dominujący jest czynnik konwekcyjny, może prowadzić do niestabilności rozwiązań. Można je wykryć jako oscylacje rozwiązania zagadnienia w rozważanym obszarze. Występują one w tych punktach obszaru, gdzie pojawiają się duże skoki gradientów szukanych wielkości. Oscylacje

mogą być tak duże, że uniemożliwiają proces zbieżności stosowanego algorytmu.

Pewne ogólne informacje na temat rozwiązania można uzyskać, analizując liczby bezwymiarowe, które opisują względny wpływ różnych członów równania na rozwiązanie. Liczba Pecleta, Pe , jest liczbą bezwymiarową, która opisuje związek pomiędzy członami równania – konwekcyjnym i dyfuzyjnym. W zagadnieniach z zakresu mechaniki płynów w członie dyfuzyjnym uwzględniona jest lepkość. Podobne informacje zawarte są w liczbie Reynoldsa, Re .

Definicje obu tych liczb zawierają charakterystyczny wymiar długości. Zarówno liczbę Pecleta, jak i Reynoldsa można obliczyć zarówno globalnie, dla całego rozważanego obszaru, jak i lokalnie, dla jego fragmentu, zależnie od przyjętego wymiaru charakterystycznego długości. Tym samym za pomocą globalnych liczb Pecleta i Reynoldsa można analizować wpływ wybranych wielkości fizycznych na globalne rozwiązanie zagadnienia oraz na jego stabilność. Lokalne odpowiedniki tych liczb pozwalają analizować lokalne właściwości rozwiązania. Lokalna liczba Pecleta określona jest przez iloczyn wy-

miaru charakterystycznego długości elementu siatki h oraz długości wektora prędkości konwekcyjnej β , podzielony przez współczynnik dyfuzji termicznej κ , co można zapisać w postaci $Pe_{\text{cell}} = h|\beta|/\kappa$. Lokalna liczba Reynoldsa określa stosunek bezwładności do lepkości pomnożony przez lokalny wymiar siatki: $Re_{\text{cell}} = h\rho|v|/\eta$.

Jak nadmieniono wcześniej, liczby te są miarą relacji między konwekcją a dyfuzją. Oscylacje w rozwiązaniu mogą się pojawić, kiedy liczba Pecleta lub liczba Reynoldsa przekracza wartość 2. Problem ten wynika ze słabej (nieodpowiedniej) dyskretyzacji obszaru, a tym samym rozwiązywanych równań. W ogólnym przypadku słaba dyskretyzacja równania nie wynika z jego właściwości. Dopóki w problemie występuje zjawisko dyfuzji, dopóty istnieje – przynajmniej w teorii – podział obszaru na elementy, w którym rozwiązanie zagadnienia jest stabilne. W większości przypadków rozmiar elementów siatki ograniczony jest wielkością pamięci dostępną w komputerze, na którym rozwiązywane jest numerycznie zagadnienie. Wynika więc stąd, że dla danego

podziału (dla danej siatki elementów) nie zawsze można rozwiązać poprawnie zagadnienie, w którym występują efekty małej skali.

LITERATURA

- [Bur1995] Burczyński T., Metoda elementów brzegowych w mechanice, WNT, Warszawa, 1995.
- [Com2007] Comsol Multiphysics User's Guide, Modeling Guide and Model Library, Documentation Set, Comsol AB, 2007.
- [Hil1968] Hildebrand F.B., Finite-Difference Equations and Simulations, Section 2.2, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
- [Hin1979] Hinton E., Owen D.R.J., An Introduction to Finite Element Computations, Pineridge, Swansea, 1979.**
- [Hua1999] Hou-Cheng Huang, Zheng-Hua Li, Asif S. Usmani, Finite Element Analysis of Non-Newtonian Flow, Springer, London, 1999.**
- [Hue1975] Huebner K.H., The Finite Element Method for Engineers, Wiley, Toronto, 1975.**
- [Hym1992] Hyman J.M., Knapp R., Scovel J.C., High Order Finite Volume Approximations of Differential Operators on Nonuniform Grids, Physica D 60, s. 112–138, 1992.

-
- [Jia2002] Jianming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Wiley–IEEE Press, 2002.
- [Kan1994] Kane J.H., *Boundary element analysis in engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [Kol2001] Kołodziej J.A., *Zastosowanie metody kolokacji brzegowej w zagadnieniach mechaniki*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2001.
- [Liu2003] Liu G.R., *Mesh Free Methods. Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, Florida, 2003.
- [Tay1981] Taylor C., Hughes T.G., *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*, Pineridge, Swansea, 1981.
- [Zie2000a] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis* (5th ed.), Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.**
- [Zie2000b] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method, Vol. 2: Solid Mechanics* (5th ed.), Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.**
- [Zie2000c] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method, Vol. 3: Fluid Dynamics* (5th ed.), Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.**
